Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Sommersemester 2020

Topologie
Blatt 4
Abgabe: 17.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
In der Ebene $\mathbb{R}^2$ als topologischer Raum bezüglich der Metrik d_∞, definiere folgende Relation:

$$(x_1, y_1)E(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

a) Zeige, dass E eine Äquivalenzrelation ist.

b) Beschreibe vollständig alle offene Mengen der Quotiententopologie auf $\mathbb{R}^2/E$. Ist uns diese Topologie bereits bekannt?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Geraden sowie die Menge $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Ebene.

a) Zeige, dass die Abbildung $\begin{array}{rccc} \beta: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$ stetig und surjektiv ist.

b) Ist die Parametrisierung β offen?

c) Sei nun X der Quotientenraum vom Intervall $[0,1]$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$sEt \Longleftrightarrow \beta(s) = \beta(t).$$

Zeige, dass die induzierte Abbildung $\overline{\beta} : X \to \mathbb{S}^1$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Ist $\mathbb{N}$ mit der koendlichen Topologie zusammenhängend? Und mit der koabzählbaren Topologie?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sei A eine zusammenhängende Teilmenge von X derart, dass A sowohl die Teilmenge B von X als auch ihr Komplement $X \setminus B$ nicht-trivial schneidet.

a) Zeige, dass $A \cap \partial B$ nicht leer ist.

b) Schließe daraus, dass der Rand ∂C einer echten Teilmenge $\emptyset \neq C \subsetneq X$ eines zusammenhängenden Raumes X nicht leer ist.

c) Gib ein Gegenbeispiel zu a) an, wenn A nicht zusammenhängend ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.